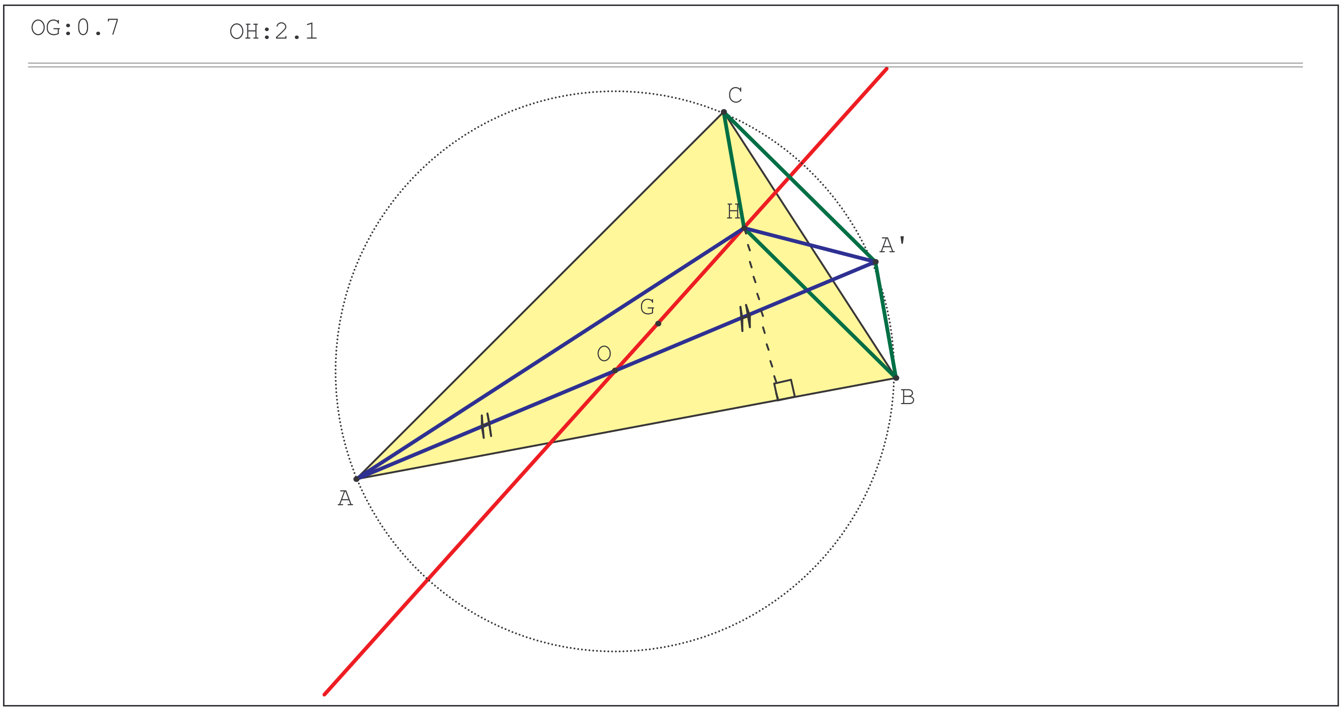
Exercice n° 1 (droite d'Euler) – 8 points

Faisons une figure pour mieux voir ce que l'on cherche à démontrer :



1. O étant par définition le centre du cercle circonscrit, l'image de tout point sur le cercle sera aussi sur le cercle, ce qui nous amène à dire que A', l'image de A par la symétrie de centre O, est sur le cercle.

2. La droite (CH) est perpendiculaire à (AB) puisque c'est la hauteur issue de C dans le triangle ABC, par définition du point H. [AA'] est un diamètre du cercle circonscrit (d'après la question 1) et B est aussi sur ce cercle, donc le triangle ABA' est rectangle en B, c'est-à-dire (BA') est perpendiculaire à (AB). Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles, donc (CH) // (BA').

3. a) De même, (BH) est perpendiculaire à (AC) car c'est la hauteur issue de B dans le triangle ABC, et (CA') est perpendiculaire à (AC) car le triangle ACA' est rectangle en C ([AA'] diamètre du cercle sur lequel se trouve C), donc (BH) // (CA'). Ce résultat combiné au résultat de la question 2 nous permet de conclure que CHBA' est un parallélogramme (en effet, un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles est un parallélogramme).

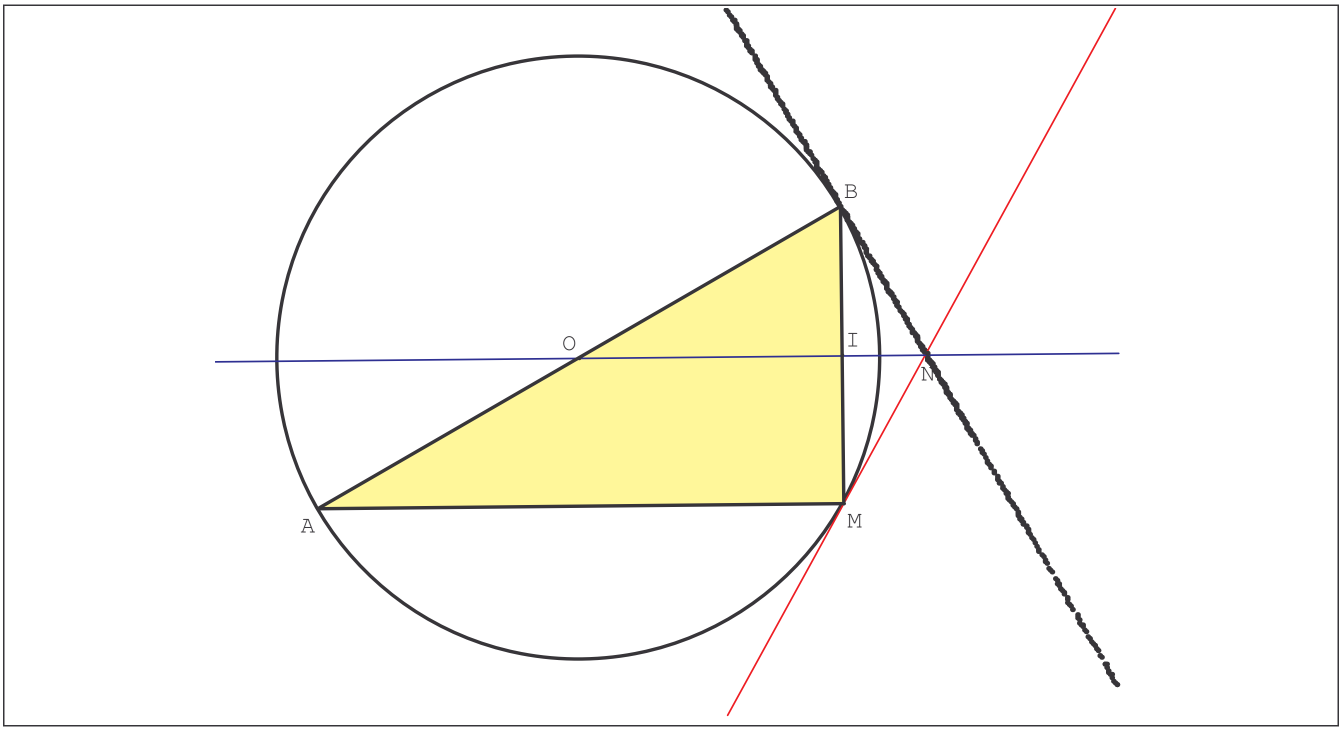
   b) CHBA' étant un parallélogramme, ses diagonales [CB] et [HA'] se coupent en leur milieu que l'on appelle I. La droite (AG) contient I par définition de G. Or, puisque I est le milieu de [HA'], la droite (AG) est aussi la médiane issue de A dans le triangle AHA'. Enfin, on sait que le centre de gravité d'un triangle est placé au tiers de la médiane issue d'un point en partant de la base opposée, ce qui nous permet d'affirmer que G est aussi le centre de gravité du triangle AHA'.

4. Puisque G est le centre de gravité du triangle AHA', il est également situé sur la médiane issue de H. Or le milieu du côté opposé [AA'] étant O (par construction de A'), cette médiane en question n'est autre que la droite (OH), et donc G $\in$ (OH) et les points O, G et H sont alignés. En

réutilisant le fait que le centre de gravité d'un triangle est placé au tiers de la médiane issue d'un point en partant de la base opposée, on aura aussi l'égalité $OG = \frac{1}{3}OH$, c'est-à-dire $3\ OG = OH$.

Exercice n° 2 (lieu d'un point) – 6 points

Faisons une figure pour mieux voir ce que l'on cherche à démontrer :



1. AMB est rectangle en M car [AB] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ qui contient le point M. I est le milieu du segment [BM] grâce au théorème de la droite des milieux (en effet, (OI) est parallèle à (AM) et passe par le milieu O de [AB], donc coupe le dernier côté [BM] en son milieu, qui est donc I).

2. On sait déjà que l'image d'une droite par une symétrie axiale est une droite. Or $N \in (OI)$, donc l'image de N par la symétrie axiale d'axe (OI) est N. De plus, l'image de M par cette même symétrie est le point B, puisque I est le milieu de [BM] et $(BM) \perp (OI)$. L'image de $\mathscr{T}$ = (MN) par la symétrie axiale d'axe (OI) est donc la droite (BN).

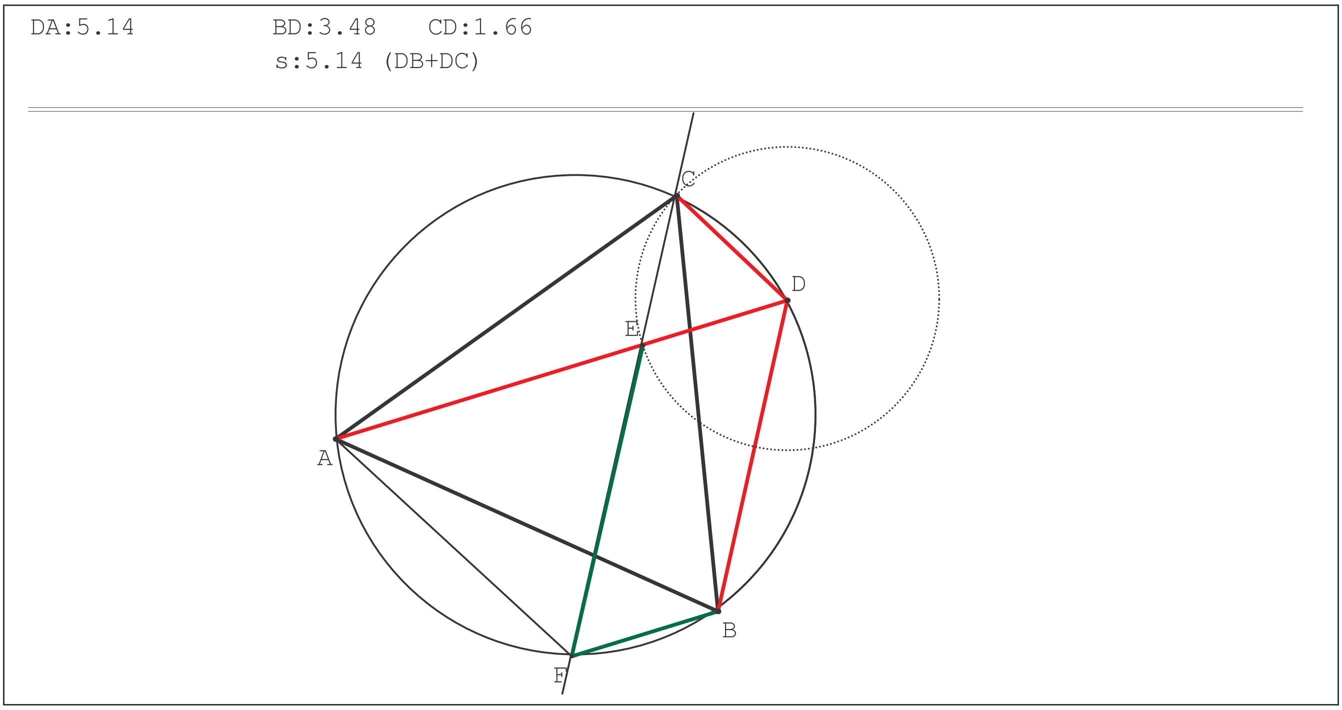
3. L'image de O est O car $O \in (OI)$, et l'image de M est B, comme on l'a vu précédemment. L'image de la droite (OM) est donc la droite (OB).

   Les droites (OM) et $\mathscr{T}$ sont perpendiculaires, puisque $\mathscr{T}$ est par définition la tangente en M au cercle $\mathscr{C}$. Par conséquent, leurs images sont aussi perpendiculaires, c'est-à-dire $(OB) \perp (BN)$.

4. N étant un point qui varie, on vient de montrer que quelque soit la position du point N, les droites (BN) et (OB) étaient perpendiculaires, donc N décrit la droite perpendiculaire à (OB) passant par B.

Exercice n° 3 (D sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$) – 6 points

Faisons une figure pour mieux voir ce que l'on cherche à démontrer :



1. DE = DC et $\widehat{CDE} = 60°$. DEC est donc un triangle isocèle en A dont l'angle $\widehat{A}$ mesure 60°, c'est donc un triangle équilatéral.

   Les points B et F interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$ dans le cercle $\mathscr{C}$, on en déduit que $\widehat{AFC} = \widehat{ABC} = 60°$. Or E est sur la droite (BC), donc $\widehat{AFE} = \widehat{AFC} = 60°$. De même, l'angle $\widehat{AEF}$ vaut 60° car opposé par le sommet à l'angle $\widehat{DEC}$ égal à 60° (car DEC est un triangle équilatéral). Le dernier angle $\widehat{AEF}$ vaut donc 180 – (60 + 60) = 60°, ce qui nous amène à dire que FAE est aussi un triangle équilatéral. En particulier, FA = FE.

2. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 60°$. Or $\widehat{AEF} = 60°$, donc les droites (EF) et (DB) sont parallèles. De même, $\widehat{BFC} = \widehat{BAC} = 60°$, et $\widehat{DEC} = 60°$, donc (DE) // (BF). Les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles, donc BFED est bien un parallélogramme.

3. On en déduit que EA = EF parce que FAE est équilatéral, puis que EF = BD par ce qui précède. De plus, DEC étant équilatéral, on a aussi DE = DC. Finalement, DA = DE + EA = DC + EF = DC + DB.