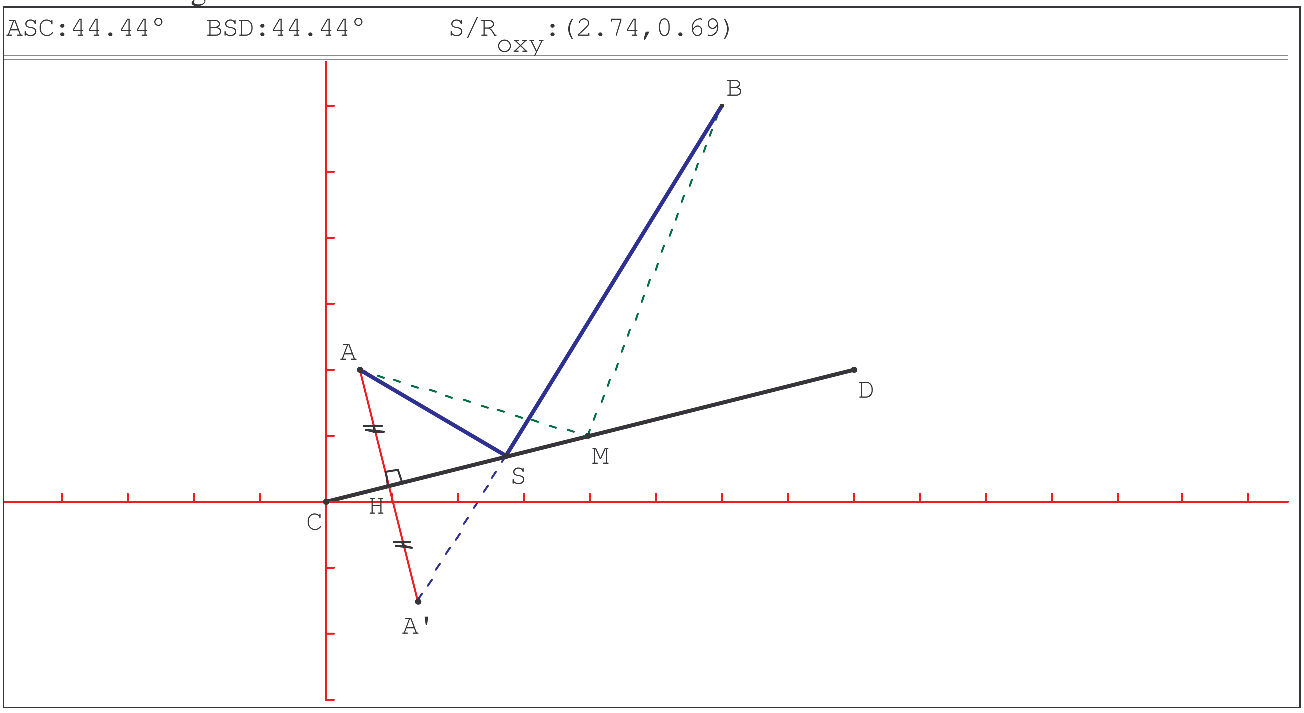
Exercice n° 1 (problème de distance)

On trace une figure :



Première méthode :

On trace le symétrique de A par rapport à la droite (CD), que l'on appelle A'. Puisque M est sur la droite (CD), ce point est sa propre image par la symétrie d'axe (CD). L'image du segment [AM] par cette symétrie est donc le segment [A'M]. Puisqu'une symétrie conserve en particulier les distances, on a que MA = MA', c'est-à-dire MA + MB = MA' + MB.

Notons S l'intersection des segments [A'B] et [CD]. Le chemin le plus court pour aller du point A' au point B est le segment [A'B]. En effet, si M désigne un point quelconque du segment [CD], alors on considère le projeté orthogonal de M sur le segment [A'B], que l'on appelle M'. Il est facile de montrer, grâce au théorème de Pythagore, que MA' $\geqslant$ SA' et que MB $\geqslant$ SB (avec égalité uniquement lorsque M = S), c'est-à-dire MA' + MB $\geqslant$ SA' + SB, ou encore MA' + MB $\geqslant$ A'B puisque les points A', S et B sont alignés dans cet ordre.

On en déduit que le point S est le seul du segment [CD] qui minimise la longueur MA' + MB, donc la longueur MA + MB. On utilise alors la règle pour déterminer environ les coordonnées du point S, et on trouve S(2,75 ; 0,7). On peut aussi appliquer la seconde méthode pour déterminer les coordonnées de S avec précision.

Deuxième méthode :

On place un repère sur cette figure, d'origine C, d'axe des abscisses horizontal et d'axe des ordonnées vertical de sorte que D soit de coordonnées (8 ; 2) (le repère était donné sur le sujet).

(CD) est une droite qui passe par l'origine, elle est donc de la forme $y = ax$. Déterminons alors a en sachant que cette droite passe par D(8 ; 2). On résout alors l'équation $2 = 8a$, qui donne $a = 1/4$.

S étant un point de cette droite, ses coordonnées s'écrivent donc sous la forme S(x ; 0,25x). On détermine alors les longueurs AS et SB :

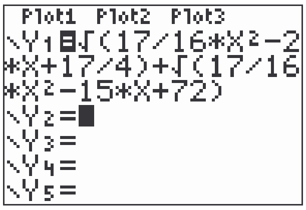
$$\mathrm{SA} = \sqrt{(x-0{,}5)^2 + (0{,}25x-2)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}x^2 - 2x + \frac{17}{4}}\ ;$$

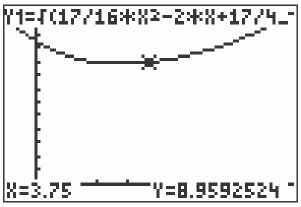
$$\mathrm{SB} = \sqrt{(x-6)^2 + (0{,}25x-6)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}x2 - 15x + 72}.$$

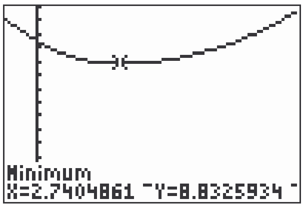
On en déduit que

$$\mathrm{SA} + \mathrm{SB} = \sqrt{\frac{17}{16}x^2 - 2x + \frac{17}{4}} + \sqrt{\frac{17}{16}x^2 - 15x + 72}.$$

Puisque ceci est une quantité dépendant de x pour laquelle on peut *a priori* pas trouver le minimum tel quel, on peut entrer cette fonction dans la calculatrice, l'afficher, et utiliser les outils mathématiques pour déterminer la valeur de x qui minimise la distance MA + MB :



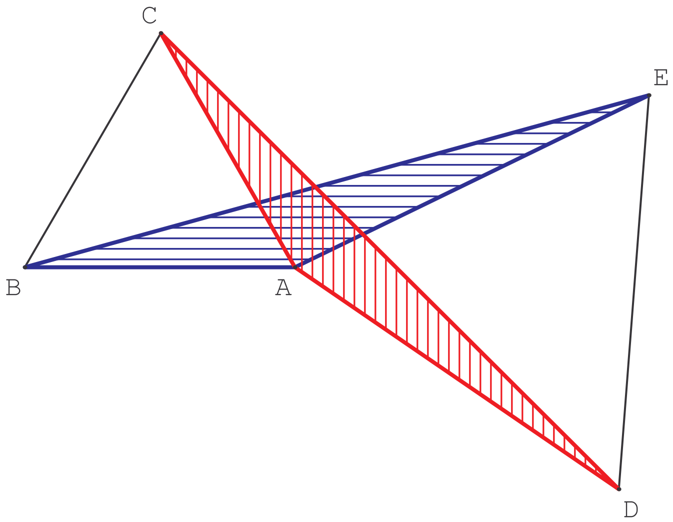




C'est donc lorsque x = 2,74 que la distance MA + MB est minimisée. Les coordonnées de S sont S(2,74 ; 0,25 × 2,74), soit S(2,74 ; 0,69).

Exercice n° 2 (triangles équilatéraux)

Faisons une figure :



Première méthode :

On se place dans les triangles BAE et CAD. On a que :

- BA = CA car ABC est un triangle équilatéral ;
- AE = AD car ADE est aussi un triangle équilatéral
- $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 60° + \widehat{CAE}$ et $\widehat{CAD} = \widehat{CAE} + \widehat{EAD} = \widehat{CAE} + 60°$, donc $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.

Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement de même mesure, alors ils sont isométriques (ou superposables). Par suite, les angles et les côtés sont deux à deux de mêmes mesures et de mêmes longueurs, ce qui nous permet d'affirmer que BD = CE.

Deuxième méthode :

On considère la rotation R de centre A et d'angle 60° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (on l'appelle « sens trigonométrique », ou « sens positif » ; le sens des aiguilles d'une montre est appelé « sens négatif »). Alors R(C) = B et R(D) = E, donc R([CD]) = [BE].

Une rotation transforme un segment en segment de même longueur, on en déduit donc que CD = BE.