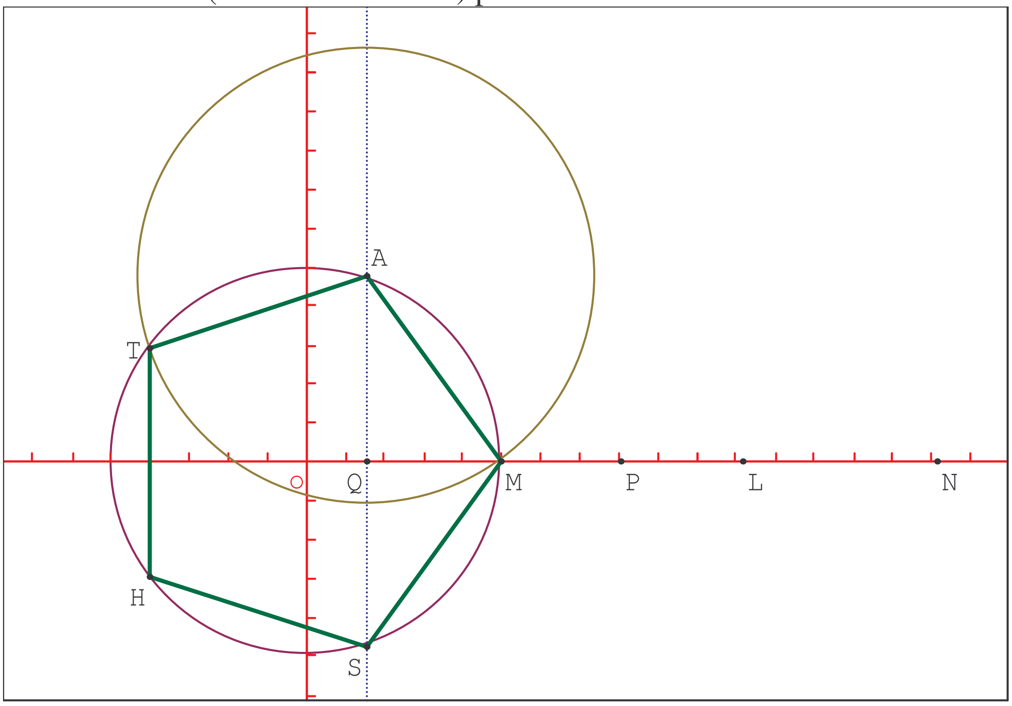
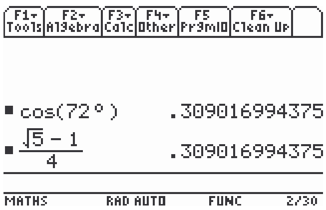
Exercice n° 1 (suite de l'exercice n° 3 du DM 1)

1. La figure suivante n'est (comme d'habitude) pas à l'échelle :



2. A la calculatrice, on obtient l'écran suivant (à partir d'une TI-89) :



On peut donc conjecturer que ces deux nombres sont égaux, à savoir :

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(72°)}.$$

Cette égalité étant admise, on pourra l'utiliser dans la suite du problème.

3. b) Le point H appartient effectivement au cercle $\mathcal{C}_1$ puisque la symétrie axiale d'axe la droite graduée transforme le cercle $\mathcal{C}_1$ en le même cercle $\mathcal{C}_1$ car la droite graduée en contient un diamètre. Puisque le point T est sur le cercle par construction, son image H par cette symétrie sera nécessairement sur le cercle.

4. $\boxed{\text{Le figure MATHS semble être un pentagone régulier}}$.

5. Le triangle OQA étant rectangle (en Q), on peut dire que

$$\cos(\widehat{QOA}) = \frac{OQ}{OA} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} / 1, \text{ donc } \boxed{\cos(\widehat{QOA}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}.$$

En conséquence, puisque les points O, M, Q sont alignés, on a $\widehat{QOA} = \boxed{\widehat{MOA} = 72°}$.

6. Les triangles MOA et AOT sont les mêmes (en effet, MO = OA = OT et MA = AT puisque M et T sont sur le même cercle de centre A), on en déduit que $\widehat{AOT} = 72°$. H, S, M et O sont les images respectives des points T, A, M et O par la symétrie axiale d'axe la droite graduée. Comme une symétrie axiale conserve les angles géométriques, on a $\widehat{MOA} = \widehat{MOS}$, et donc $\widehat{MOA} = \widehat{SOM}$. De même, $\widehat{AOT} = \widehat{SOH}$, et donc $\widehat{AOT} = \widehat{HOS}$. Conclusion provisoire :

$$\widehat{MOA} = \widehat{AOT} = \widehat{HOS} = \widehat{SOM} = 72°.$$

On constate que l'angle plat $\widehat{MOM}$ (qui vaut 360°) est égal à $\widehat{MOA} + \widehat{AOT} + \widehat{TOH} + \widehat{HOS} + \widehat{SOM}$. Donc $\widehat{TOH} + 4 \times 72 = 360$, c'est-à-dire $\widehat{TOH} = 360 - 288 = 72°$. Au final,

$$\boxed{\widehat{MOA} = \widehat{AOT} = \widehat{TOH} = \widehat{HOS} = \widehat{SOM} = 72°}.$$

Exercice n° 2 (nombres)

1. VRAI, puisque tout entier n peut s'écrire sous la forme $\frac{n}{1}$.
2. FAUX, car $\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$ est un rationnel.
3. FAUX, car $\sqrt{2}$ est un irrationnel de carré 2, qui n'est pas irrationnel.
4. VRAI, car si son inverse était rationnel, ce serait aussi un rationnel.
5. VRAI, un rationnel s'écrivant $\frac{a}{b}$ admet pour inverse $\frac{b}{a}$, qui est aussi rationnel.
6. FAUX, car $\frac{3}{5} = 0{,}6$ est un décimal d'inverse $\frac{5}{3}$ (qui n'est pas décimal).
7. FAUX, car $3 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$.
8. VRAI, car $-5 \in \mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
9. VRAI, car $\frac{1+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{-7+5\sqrt{5}}{4}$ et $\sqrt{5}$ est irrationnel.

Exercice n° 3 (critère de divisibilité par 7)

1. * <u>653</u> : 65 – (3 × 2) = 65 – 6 = 59. 59 n'est pas divisible par 7, donc $\boxed{\text{653 non plus}}$.

   * <u>1589</u> : 158 – (9 × 2) = 158 – 18 = 140, donc $\boxed{\text{1589 est divisible par 7}}$.

   * <u>938</u> : 93 – (8 × 2) = 93 – 16 = 77, donc $\boxed{\text{938 est divisible par 7}}$.

   * <u>452</u> : 45 – (2 × 2) = 45 – 4 = 41, donc $\boxed{\text{452 n'est pas divisible par 7}}$.

2. a) • En regardant l'exemple donné, $\boxed{\text{c'est } a}$.

   • $\boxed{\text{Il s'agit de } 2b}$.

   • On en déduit que $\boxed{\text{c'est } a - 2b}$.

   b) Cette divisibilité se traduit par l'égalité $\boxed{\dfrac{a-2b}{7} = k, \text{ où } k \text{ désigne un entier}}$.

3. Puisque $\dfrac{10(a-2b)}{7} = 10\,\dfrac{a-2b}{7} = 10k$ est aussi un entier, donc $\boxed{10(a-2b) \text{ est divisible par } 7}$

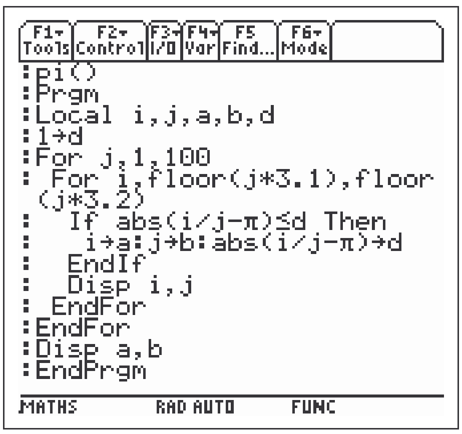
   Puisque $\dfrac{21b}{7} = 3b$ est un entier, $\boxed{21b \text{ est aussi divisible par } 7}$.

   On en déduit que $\dfrac{10(a-2b)+21b}{7} = 10k + 3b$ est aussi un entier, donc $\boxed{10(a-2b)+21b \text{ est aussi divisible par } 7}$.

4. $10(a-2b) + 21b = 10a - 20b + 21b = 10a + b = n$. On peut donc conclure en disant, sous l'hypothèse que $a - 2b$ soit divisible par 7, que n est aussi divisible par 7. Autrement dit (en français plus courant »…),

Si la différence du nombre de dizaines d'un nombre n (à ne pas confondre avec le chiffre des dizaines !) et du double du chiffre des unités est divisible par 7, alors n l'est aussi.

Exercice bonus :



Il fallait trouver $a = 311$ et $b = 99$. Pour le déterminer, on pouvait faire un petit programme sur sa calculatrice (ici, sur TI-89, mais ce n'est pas si différent sut TI-83), et voici l'écran obtenu (le résultat final est les deux derniers nombres affichés – l'avant-dernier est le numérateur et le dernier est le dénominateur) :