Exercice n° 1 (calculs) – 4 points

1. Déterminer l'écriture scientifique des nombres suivants :
   $327{,}53 = 3{,}2753 \times 10^2$;
   $0{,}00514 = 5{,}14 \times 10^{-3}$;
   $91{,}8 \times 10^{-4} = 9{,}18 \times 10^{-3}$;
   $0{,}00514 \times 10^4 = 5{,}14 \times 10^1$.

2. a) $A = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + 2 + \dfrac{1}{x}$. On a utilisé l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   b) Pour $x = \dfrac{2}{7}$, A vaut $\dfrac{2}{7} + 2 + \dfrac{7}{2} = \dfrac{4 + 14 + 49}{7} = \dfrac{67}{7}$, et ce nombre est un nombre décimal car il vaut 9,57.
   c) Si x est un rationnel, alors $\dfrac{1}{x}$ l'est aussi, et donc d'après a), A l'est aussi en tant que somme de nombres rationnels (on rappelle que 2 est en particulier aussi un nombre rationnel !)

3. Factoriser le plus possible :
   $$\begin{aligned} A &= (x^2 - x + 1)^2 - (x^2 + x + 5)^2 \\ &= [(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 5)] \times [(x^2 - x + 1) + (x^2 + x + 5)] \\ &= (-2x - 4) \times (2x^2 + 6) \\ &= -4(x - 2)(x^2 + 3) \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} B &= (a^2 + 1)^2 + 2(a^2 + 1)(a - 1) + (a - 1)^2 \\ &= [(a^2 + 1) + (a - 1)]^2 \\ &= (a^2 + a)^2 = a^2 (a + 1)^2. \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} C &= (3x - 2)^2 - (2x - 1)(3x - 2) \\ &= (3x - 2) [(3x - 2) - (2x - 1)] \\ &= (3x - 2)(x - 1). \end{aligned}$$

4. *Petit problème de réflexion* :
   $$A = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{(\sqrt{5} - 2)^2}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = \frac{(\sqrt{5})^2 - 4\sqrt{5} + 2^2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{9 - 4\sqrt{5}}{1} = B,$$
   donc A et B sont bien égaux.

Exercice n° 2 (sur la parité des nombres entiers) – 4 points

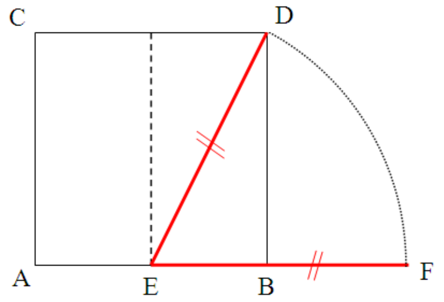
Soit k un entier relatif (c'est-à-dire $k \in \mathbb{Z}$). **On rappelle qu'un nombre est pair si 2 en est un diviseur et impair s'il n'est pas pair**.

1. $2k$ est un nombre pair car $\dfrac{2k}{2} = k$, qui est entier, donc 2 est un diviseur de $2k$. Par contre $2k + 1$ est impair car $\dfrac{2k + 1}{2} = k + \dfrac{1}{2}$ n'est pas entier, donc 2 n'est pas un diviseur de $2k + 1$.
2. $(2k)^2 = 4k^2$ admet 2 comme diviseur (car $\dfrac{4k^2}{2} = 2k^2 \in \mathbb{Z}$), donc c'est un nombre pair. Par contre, $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair car $\dfrac{4k^2 + 4k + 1}{2} = 2k^2 + 2k + \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
3. $(2k)^3 = 8k^3$ admet 2 comme diviseur (car $\dfrac{8k^3}{2} = 4k^3 \in \mathbb{Z}$), donc c'est un nombre pair. Par contre, $(2k + 1)^3 = (2k + 1)(2k + 1)^2 = (2k + 1)(4k^2 + 4k + 1) = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$ est impair car $\dfrac{8k^3 + 12k^2 + 6k + 1}{2} = 4k^3 + 6k^2 + 3k + \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
4. D'après ce qui précède, on peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $(2k)^n$ est un nombre pair, et $(2k + 1)^n$ est un nombre impair.

Exercice n° 3 (lien entre nombre et géométrie) – 6 points

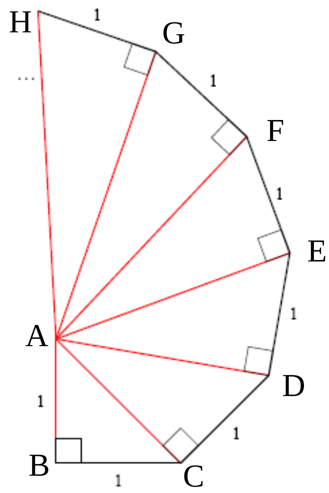
PARTIE I : Construction de $\sqrt{5}$

1. Puisque E est le milieu du segment [AB], AE = EB = 1 cm. ABCD étant un carré, le triangle EBD est rectangle en B, et l'on peut donc appliquer le théorème de Pythagore pour trouver que $ED^2 = EB^2 + BD^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, donc $ED = \sqrt{5}$ cm (et non $-\sqrt{5}$, qui est aussi solution, parce qu'on parle de distances, donc de quantités positives). Enfin, puisque ED = EF, on a $\boxed{AF = AE + EF = 1 + \sqrt{5}\text{ cm}}$.

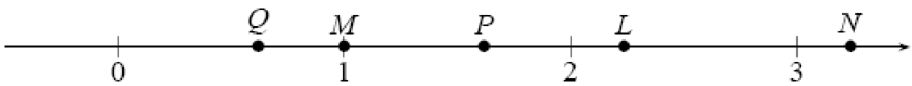


2. a) Voir à droite.

   b) Pour déterminer chaque longueur, on utilise le théorème de Pythagore. Par exemple, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$, donc $\boxed{AC = \sqrt{2}\text{ cm}}$. A partir de là, on trouve $AD^2 = AC^2 + CD^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$, d'où $\boxed{AD = \sqrt{3}\text{ cm}}$. En continuant ce raisonnement, on trouve les autres résultats : $\boxed{AE = \sqrt{4}\text{ cm} = 2\text{ cm}}$, $\boxed{AF = \sqrt{5}\text{ cm}}$, $\boxed{AG = \sqrt{6}\text{ cm}}$ et enfin $\boxed{AH = \sqrt{7}\text{ cm}}$.



3. Voici la droite graduée (pas à l'échelle demandée…) :



Exercice n° 3 (entiers qui sont somme de deux carrés) – 6 points

1. Par exemple, $25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2$ et $100 = 64 + 36 = 8^2 + 6^2$.

2. <u>Calcul littéral</u>

   a) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac)^2 + 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2abcd + (bc)^2$
   $= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, et l'égalité est ainsi justifiée.

   b) x et y étant par hypothèse sommes de deux carrés, on peut par exemple les noter $x = a^2 + b^2$ et $y = c^2 + d^2$. D'après ce qui précède, on a alors $xy = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$, et cette dernière expression est bien une somme de deux carrés. Donc le produit xy est aussi une somme de deux carrés.

   c) Si x est somme de deux carrés, alors $x \times x = x^2$ l'est aussi par la question b) (c'est le produit de deux nombres, ici égaux, s'écrivant sous forme de somme de deux carrés). De même, $2 = 1^2 + 1^2$ est somme de deux carrés, donc cette même question b) nous assure que $2 \times x = 2x$ est aussi somme de deux carrés.

3. <u>Applications numériques</u>

   a) $\underline{13 \times 34} = (3^2 + 2^2)(5^2 + 3^2) = (3 \times 5 + 2 \times 3)^2 + (3 \times 3 - 2 \times 5)^2 = 21^2 + (-1)^2 = 21^2 + 1^2$.
   $\underline{2 \times 34} = (1^2 + 1^2)(5^2 + 3^2) = (1 \times 5 + 1 \times 3)^2 + (1 \times 3 - 1 \times 5)^2 = 8^2 + (-2)^2 = 8^2 + 2^2$.
   $\underline{34^2} = (5^2 + 3^2)(5^2 + 3^2) = (5 \times 5 + 3 \times 3)^2 + (5 \times 3 - 3 \times 5)^2 = 34^2 + 0^2$.

   b) **Question bonus** : $\underline{2005} = 5 \times 401 = (2^2 + 1^2)(20^2 + 1^2) = (2 \times 20 + 1 \times 1)^2 + (2 \times 1 - 1 \times 20)^2 = 41^2 + (-18)^2 = 21^2 + 18^2$.