La notation tiendra compte du soin apporté à la copie, du nombre de fautes d'orthographe, et surtout de la clarté des réponses (il va de soi que tout calcul doit être justifié).

Exercice n° 1 (calculs) – 4 points

1. Déterminer l'écriture scientifique des nombres suivants :
   $327{,}53$; $0{,}00514$;
   $91{,}8 \times 10^{-4}$; $0{,}00514 \times 10^{4}$
2. a) Développer $A = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

   b) Calculer A pour $x = \dfrac{2}{7}$. Quelle est la nature du nombre obtenu (entier, décimal, …) ?

   c) Montrer que si x est un nombre rationnel, alors A en est un aussi.
3. Factoriser le plus possible :

   $A = (x^2 - x + 1)^2 - (x^2 + x + 5)^2$

   $B = (a^2 + 1)^2 + 2(a^2 + 1)(a - 1) + (a - 1)^2$

   $C = (3x - 2)^2 - (2x - 1)(3x - 2)$
4. *Petit problème de réflexion* :

   Les nombres $A = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$ et $B = 9 - 4\sqrt{5}$ sont-ils égaux ? Justifier la réponse.

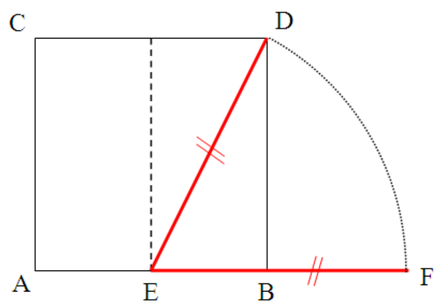
Exercice n° 2 (sur la parité des nombres entiers) – 4 points

Soit k un entier relatif (c'est-à-dire $k \in \mathbb{Z}$). **On rappelle qu'un nombre est pair si 2 en est un diviseur et impair s'il n'est pas pair**.

1. Quelle est la parité du nombre $2k$? du nombre $2k + 1$? Justifier la réponse.
2. Déterminer la parité du nombre $(2k)^2$, puis celle du nombre $(2k + 1)^2$, en justifiant la réponse donnée.
3. Même question pour les nombres $(2k)^3$ et $(2k + 1)^3$.
4. Conjecturer la parité des nombres $(2k)^n$ et $(2k + 1)^n$, où n est un entier naturel.

Exercice n° 3 (lien entre nombre et géométrie) – 6 points

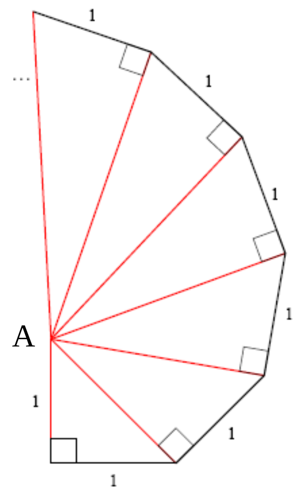
Cet exercice porte sur le nombre d'or $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (ϕ, ou phi, est une lettre grecque qui se lit « fi »).



PARTIE I : Construction de $\sqrt{5}$

1. ABCD est un carré de 2 cm de côtés, E est le milieu du segment [AB]. Calculer la longueur du segment [AF].

2. On considère maintenant la figure suivante que l'on construit en partant d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés égaux mesurent 1 unité. A partir du troisième côté, on reconstruit un triangle rectangle dont l'un des côtés mesure 1 unité, et l'on continue ainsi…



a) Refaire cette figure sur votre copie (en taille réelle) en donnant un nom à chacun des points construits.

b) Déterminer la longueur de chacun des segments partant du point A (c'est-à-dire chaque segment dont on ne connaît pas la longueur).

c) Tracer une droite graduée (unité : 5 cm). Placer sur cette droite avec le plus de précision possible les points suivants :

$$L(\sqrt{5}) \quad ; \quad M(1) \quad ; \quad N(1+\sqrt{5}) \quad ; \quad P\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{et} \quad Q\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right).$$

La partie II fera l'objet du prochain devoir maison…

Exercice n° 3 (entiers qui sont somme de deux carrés) – 6 points

On s'intéresse dans cet exercice aux nombres entiers naturels qui sont sommes de deux carrés d'entiers naturels. Par exemple, c'est le cas de 5, 2, 13 ou encore 34 car

$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2 \quad ; \quad 2 = 1^2 + 1^2 \quad ; \quad 13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \quad ; \quad 34 = 9 + 25 = 3^2 + 5^2.$$

En revanche, par exemple, les entiers 3 et 4 ne sont pas de cette forme car 3 = 2 + 1 et 4 = 3 + 1 = 2 + 2 (et aucun des nombres 2 et 3 ne sont le carré d'un entier naturel).

1. Donner deux autres nombres entiers qui sont sommes de deux carrés d'entiers.
2. Calcul littéral
   a) Soient a, b, c et d quatre entiers naturels. Justifier l'égalité suivante :
   $$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$
   b) Déduire de l'égalité précédente que si x et y sont deux entiers sommes de deux carrés chacun (*indication* : écrire par exemple $x = a^2 + b^2$…), il en est de même pour leur produit xy.
   c) Déduire de ce qui précède que si un nombre x est somme de deux carrés, il en est de même pour son carré x^2 et pour son double $2x$.
3. Applications numériques
   a) Ecrire 13×34, 2×34 et 34^2 comme somme de deux carrés (relire le début d'énoncé pour avoir la décomposition en somme de carrés de 2, 13 et 34…)
   b) **Question bonus** : Ecrire 2005 comme somme de deux carrés (*indication* : $2005 = 5 \times 401$).

II – ALLONS PLUS LOIN…

3. A l'aide de la calculatrice, comparer les nombres cos(72°) et $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O (le point d'abscisse 0 sur la droite graduée précédemment tracée) et de rayon 1, ainsi que la perpendiculaire à la droite graduée passant par le point Q. Elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et S.

4. Tracer les deux cercles $\mathcal{C}_1$ de centre A passant par M et $\mathcal{C}_2$ de centre S passant aussi par M. $\mathcal{C}_1$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points : M, et un autre que l'on appelle T. De même, $\mathcal{C}_2$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points : M, et aussi un autre que l'on appelle H. Quelle est la nature de la figure formée des points M, A, T, H, S ? (on ne demande pas de justification pour cette réponse)